Interactions stratégiques et dynamique d'apprentissage dans la manipulation du Libor

Guillaume Dupéret ¹

MINES ParisTech, PSL University, CERNA, i3 UMR CNRS

Hugo Subtil²

Décembre 2020 – Version préliminaire

Résumé

La manipulation par les banques du Libor, taux central du marché interbancaire, a été abondamment mesurée et commentée. Le présent travail entend aborder cette manipulation d'un point de vue théorique, afin d'examiner les incitations auxquelles ses principaux acteurs ont été soumis. L'approche d'économie de l'information en interactions stratégiques présentée dans ce mémoire examine la dynamique de la relation d'agence telle qu'elle a pu naître au sein du groupe formé par les acteurs de la manipulation. Lorsqu'un doute existe quant à la présence ou non d'un régulateur, les joueurs tendent à accroître l'ampleur de leur triche afin, dans une dynamique d'apprentissage bayesien, de révéler la présence du régulateur. Cette méthode, reliant l'ampleur de la manipulation à la croyance quant à l'existence du régulateur, permet de mettre en évidence une dynamique de manipulation tout à fait conforme à l'histoire probable ou avérée du Libor de 1980 à nos jours.

Mots-clés: Libor, industrie financière, collusion, apprentissage bayesien Codes JEL: E43, G24, L13, L14

^{1.} Contact : guillaume.duperet@mines-paristech.fr. Centre d'économie industrielle (CERNA), Mines ParisTech, 60 boulevard Saint-Michel, 75006 Paris.

^{2.} Contact : hugo.subtil@ensae.fr.

Abstract

Libor manipulation has been extensively measured and commented on, but economic literature remains sparse on the incentive structure that characterized the agents involved in the manipulation itself. To provide deeper insight into this manipulation, the present work intends to approach this manipulation from a theoretical point of view, to examine the incentives to which its main actors were subjected. The information economics approach to strategic interactions presented in this paper examines the dynamics of agency relationship as it may have arisen within the group formed by the actors of the manipulation. When there is doubt as to the presence or absence of a regulator, players tend to increase the extent of their cheating in order, in a Bayesian learning dynamic, to reveal the presence of the regulator.

This method, linking the extent of the manipulation to the belief in the existence of the regulator, makes it possible to highlight a dynamic of manipulation consistent with the likely history of Libor from 1980 to the present day.

Table des matières

Résumé				
1	Inti	roduction	2	
_	1.1	Pourquoi étudier le Libor	$\overline{2}$	
	1.2	Qu'est-ce que le Libor?	3	
		1.2.1 La construction historique du Libor	3	
		1.2.2 La construction statistique du Libor	4	
	1.3	Problématique de recherche : comment rationaliser la manipula-		
		tion du Libor?	5	
		$1.3.1 \ll L'affaire du Libor \gg : présentation de la manipulation .$	5	
2	Rev	vue de littérature	6	
	2.1	Littérature économétrique	7	
	2.2	Littérature théorique	7	
3	Modélisation en interactions stratégiques			
	3.1	Introduction modèle	10	
		3.1.1 Cadre de résolution en interactions stratégiques	11	
		3.1.2 La menace du régulateur	15	
	3.2	Résolution en une période	15	
		3.2.1 Résolution générale	15	
	3.3	3.2.2 Application à une forme fonctionnelle logarithmique Pré-requis pour une résolution en plusieurs périodes : la dyna-	17	
		mique des α_n (bayesian updating)	19	
	3.4	Résolution pour des agents myopes sur deux périodes	20	
		3.4.1 Résolution générale	20	
		3.4.2 Application à une forme fonctionnelle logarithmique	22	
	3.5	Généralisation pour des agents myopes dans un modèle à horizon		
		infini	23	
		3.5.1 Interprétations et graphiques	24	
		3.5.2 De l'analyse du modèle à celle du Libor	27	
	3.6	Au-delà de la myopie	28	
		3.6.1 Étude du cas général en deux périodes	28	
		3.6.2 Application à une forme fonctionnelle logarithmique	30	
4	Cor	nclusion : une relecture de l'histoire de la manipulation	33	
Bi	Bibliographie			

1 Introduction

1.1 Pourquoi étudier le Libor

Avec l'origine financière de la crise de 2008, la question de la formation des prix, et notamment de l'information qu'ils contiennent, s'est installée au premier plan : d'une part, l'éclatement de la bulle des subprimes et la crise des dettes souveraines ont conduit à réévaluer le travail des agences de notation, et d'autre part le plus grand krach boursier depuis près d'un siècle a posé en des termes renouvelés la question de la valorisation des sociétés comme des titres. S'en tenir à ces exemples médiatiques et abondamment traités conduirait toutefois à omettre que l'enjeu de la circulation de l'information sous-jacente aux prix de marché concerne aussi les marchés de taux. Il a en effet été avéré que le Libor, taux central du marché interbancaire et référence pour les marchés financiers dans leur ensemble, a fait l'objet d'une manipulation de grande ampleur au cours des années 2000 par les membres du panel à l'origine de son calcul. Compte tenu des centaines de milliers de milliards de dollars de produits financiers dont le taux est calculé à partir du Libor, comprendre précisément sa manipulation s'impose à la fois pour mieux comprendre les acteurs financiers et réformer au mieux l'indicateur pour les décennies à venir. La description de la rationalité, de la coordination et des procédures de valorisation des acteurs financiers est alors fondamentale.

Pour ce faire, ce travail propose d'analyser la manipulation dans le cadre d'une relation d'agence au sein de la banque elle-même. En effet, comme nous le démontrerons, les acteurs de ce marché ne savaient pas avec précisions les règles qui régissaient leurs interactions. Ainsi, en l'absence de la connaissance du type du régulateur les traders pouvaient être incité à tricher afin de découvrir si oui ou non le marché était surveillé.

Ce travail entend montrer qu'une telle démarche permet de cerner les raisons d'agir des acteurs de la manipulation.

Plus largement, s'il existe désormais une littérature assez développée sur le Libor, elle demeure assez largement à l'échelle de la banque vue comme un unique acteur (étude de la contribution au panel, déclaration optimale pour un indicateur alternatif, etc.), qui est donc aussi l'échelle des propositions de réformes qu'elle formule. Or, une étude précise des acteurs en situation permet de mettre au jour un réseau à l'intérieur de chaque banque (traders, contributeur au panel) comme à l'extérieur (autres traders, brokers).

En ce sens, ce travail se propose de venir en complément d'un travail de recherche débuté par Dupéret (2019) en vue de modéliser la rationalité dans la manipulation du Libor. L'approche bayesienne proposée ici permet alors, avec les outils de l'économie de l'information, de compléter les explications fournies par son étude de la dynamique de la manipulation dans son contexte en lien avec le paradigme de l'économie des conventions.

Ce travail débute par une présentation de l'indicateur du Libor (1.2) et de

la littérature permettant de mieux appréhender sa manipulation (2). La section (3) présente les intuitions permettant de construire un modèle en interactions stratégiques, que les sous-sections (3.1) à (3.6) peuvent alors résoudre afin de précisément montrer, au plus près de la réalité de *l'affaire Libor*, la rationalité dans le comportement des *traders*. A partir des enseignements d'une telle approche, la section (4) propose donc de porter un regard sur la réforme de l'indicateur : telle qu'elle fut préconisée par le principal rapport ayant formulé des préconisations à son sujet (*rapport Wheatley*).

1.2 Qu'est-ce que le Libor?

1.2.1 La construction historique du Libor

Chaque prêt suppose la fixation d'un taux d'intérêt dont la détermination doit être relativement précise : à une base commune facturée par l'agent prêteur (typiquement, la banque) à sa contrepartie doit être ajouté un spread spécifique à chaque transaction, c'est-à-dire une majoration dépendant d'un certain nombre de risques (risque de contrepartie, risque de liquidité, historique des transactions entre agents...). Dans un tel cadre, le Libor, acronyme du $London\ Interbank\ Offered\ Rate$, vise à définir une telle base commune à laquelle seraient ajoutés les spreads pour un grand nombre de transactions. On dira alors d'un prêt qu'il est accordé à « Libor + 50 bp » pour dire que son taux est égal à celui du Libor auquel on ajoute 50 points de pourcentage (exemple typique d'obligation corporate accordée à une entreprise ayant un bon historique de crédit).

Le tournant des années 1980 complète ce cadre simple qui à lui seul suffirait à rendre nécessaire un taux d'intérêt de référence sur les marchés. Cette décennie voit en effet la dérégulation financière ouvrir largement les possibilités de trading des banques d'investissement, tandis que l'innovation financière prospère : à la multiplication des opérations de prêts complexes (syndication par exemple) s'ajoute l'essor de nombreux produits financiers supposant l'existence d'un taux d'intérêt observable par tous sur les marchés, comme les contrats FRA (forward rate agreement), les IRS (interest rate swap) ou les options de change. Ces derniers contrats sont cependant pour l'essentiel négociés sur des marchés de gré-à-gré (OTC, over-the-counter), de sorte que la négociation de nombreux contrats est grandement facilitée par l'existence d'un taux synthétique.

Ces différents besoins débouchent sur la création du Libor en 1986 à la suite d'une demande des banques elles-mêmes à leur association : la British Bankers' Association (BBA). Suite à cette demande, des groupes de travail sont constitués par la BBA autour notamment de membres des banques et de la Bank of England pour concevoir un tel indicateur. Ces travaux conduisent à la création du BBAIRS (pour BBA Interest Settlement Rates) le 2 septembre 1985, suivie en janvier 1986 d'un indicateur très proche du Libor dans sa forme actuelle.

1.2.2 La construction statistique du Libor

Que mesure(nt) exactement le(s) Libor(s)? Si le besoin d'un taux de référence était grand, le benchmark choisi correspond à une valeur bien précise, celle des conditions de prêt sans collatéral (unsecured funding) sur le marché interbancaire de Londres. La question posée quotidiennement aux banques est ainsi la suivante : « At what rate could you borrow funds, were you to do so by asking for and then accepting inter-bank offers in a reasonable market size just prior to 11 am? »La lettre de la question posée était quelque peu différente avant 1998^{1} , mais l'idée est toujours que le Libor a pour vocation de refléter le taux auquel les banques (d'un échantillon donné) acceptent de se prêter entre elles.

Il n'y a pas un mais plusieurs taux Libor. En effet, les banques se prêtent à des taux qui diffèrent selon deux paramètres essentiels pris en compte par l'indicateur :

- La devise : selon la devise dans laquelle les banques prêtent ou empruntent des fonds, le taux diffère. Initialement calculé sur trois devises (dollar américain USD, yen japonais JPY et livre sterling GBP), le Libor est aujourd'hui calculé pour dix devises différentes : AUD, CAD, CHF, DKK, EUR, GBP, JPY, NZD, SEK et USD.
- La maturité : les taux d'intérêt différent largement en fonction de la maturité car le risque de contrepartie est, logiquement, croissant avec cette dernière. Au moment de l'affaire du Libor, ce sont ainsi sur quinze maturités de court terme (allant de l'overnight à un an) différentes que le Libor était calculé.

En somme, la BBA publiait ainsi chaque jour de cotation 150 taux, un par devise et par maturité.

L'exhaustivité de la présentation impose de faire remarquer que la gestion quotidienne du Libor est déléguée depuis le 1^{er} février 2014 à l'*Intercontinental Exchange Benchmark Association* (https://www.theice.com/iba). Cela est cependant sans conséquences sur l'étude qui va suivre : d'une part parce que le mode de calcul du Libor demeure pour l'instant inchangé malgré différents projets à l'étude, et d'autre part parce que l'étude de la manipulation, objet du présent travail, impose surtout de bien comprendre le fonctionnement de l'indicateur à l'époque de cette dernière.

Comment le Libor est-il calculé ? Pour obtenir un Libor pour chaque couple devise-maturité donné, la BBA s'appuie sur un panel constitué par les plus grandes banques sur la place de Londres. Chacune de ces banques annonce quotidiennement le taux auquel elle peut s'endetter juste avant 11 heures pour chacun des couples possibles. Étant donné le grand nombre de devises et de maturités faisant l'objet d'une publication, il arrive que des banques n'aient pas opéré de transactions sur un ou plusieurs compartiments peu profonds du

 $^{1. \}ll At$ what rate do you think interbank term deposits will be offered by one prime bank to another prime bank for a reasonable market size today at 11am? \gg , dont la formulation semblait moins demander la révélation d'une information privée...

marché interbancaire faisant l'objet d'un Libor. Dans ce cas, elles doivent malgré tout contribuer à l'indicateur à partir d'une estimation interne fondée sur leur propre profil de risque (liquidité et contrepartie).

Concrètement, chacun des taux déclarés, effectifs ou estimés, est remis chaque matin entre 11 heures et 11 heures 10 (non à la BBA, mais à Thomson Reuters mandaté pour la collecte). Il est à noter que chaque banque répond sans connaître les contributions des autres banques pendant la fenêtre de déclaration, mais que toutes les réponses sont divulguées ex post, en même temps que le Libor pour chacun des compartiments évalués.

Une fois toutes les contributions collectées, le mode de calcul retenu est une moyenne arithmétique tronquée : Reuters classe toutes les contributions par ordre croissant et retire, globalement et selon des modalités qui varient quelque peu selon le nombre de valeurs obtenues, le quart des plus grandes valeurs et le quart des valeurs les plus faibles. Thomson Reuters dispose de formules de calcul quel que soit le nombre de réponses, mais les deux modalités les plus fréquentes (pour les indicateurs les plus importants) sont 16 ou 18 déclarations; dans ces deux cas, les valeurs exclues sont les 4 plus élevées et les 4 plus faibles. Cette troncature de l'échantillon a explicitement pour but d'éliminer de potentiels outliers, institutions financières étant soumises à (et ayant soumis) des valeurs extrêmes non représentatives de l'état du marché – et également d'éviter des manipulations à petite échelle...

S'il serait d'ores et déjà possible de présenter plus précisément la structure interne des banques pour mieux comprendre l'architecture de la fraude qui a été développée, la présentation qui précède est largement suffisante pour comprendre l'essentiel de la manipulation et ne sera complétée qu'en temps utiles.

1.3 Problématique de recherche : comment rationaliser la manipulation du Libor?

1.3.1 « L'affaire du Libor » : présentation de la manipulation

Le 16 avril 2008, le Wall Street Journal révèle par l'intermédiaire de Carrick Mollenkamp (2008) l'existence probable d'une manipulation de grande ampleur du taux Libor. À partir d'une méthodologie très simple développée dans un autre article signé par le même Carrick Mollenkamp et Mark Whitehouse (2008) en mai, les deux journalistes tentent de reconstruire ce que « devrait » être le Libor. Par backtesting, ils comparent ensuite « leur » Libor à celui annoncé par Reuters et la BBA depuis plusieurs années. Confortant leurs estimations par l'avis d'un trader de Citigroup, ils font état d'un biais baissier de l'ordre de 0,3 point de pourcentage à une date à laquelle le Libor valait 2,7 %.

Le scandale fait immédiatement grand bruit, en partie car, d'après les estimations du journal, l'indicateur sert de base pour le paiement d'intérêts sur plusieurs billions de dollars de prêts à destination des entreprises, des ménages et des étudiants; l'estimation de 500 billions de dollars pour divers produits

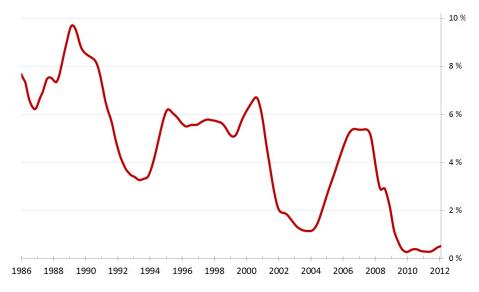


FIGURE 1 – Taux du Libor à 3 mois pour le dollar américain de 1986 à 2012

dérivés (comme les IRS) est également avancée ².

La révélation au grand public de soupçons tus jusqu'alors est allée de pair avec l'ouverture de procédures judiciaires. C'est ainsi qu'UBS a coopéré dès 2011 avec les autorités américaines (dans le cadre d'un programme de clémence), confirmant ainsi les soupçons du Wall Street Journal. Les banques inculpées sont souvent poursuivies par de multiples instances ³, et parmi les amendes les plus importantes il faut relever celle à laquelle UBS a été condamnée en décembre 2012 (1,5 milliard de dollars, dont 1,2 aux États-Unis). Le scandale a également conduit à un certain nombre de licenciements et démissions; ainsi à Barclays de Marcus Agius (président) et Bob Diamond (directeur général), par exemple.

2 Revue de littérature

Le montant colossal des sommes adossées sur le Libor ainsi que l'ampleur de la manipulation présumée, dans un contexte de défiance à l'égard des marchés financiers, a suscité articles de presse et publications académiques. Cette littérature peut être synthétisée à travers deux axes principaux :

^{2.} Dans l'article « Behind the Libor Scandal » de son édition du 10 juillet 2012, le New York Times estime que parmi les prêts à taux variables émis aux États-Unis, les taux de 45 % des crédits hypothécaires prime et de 80 % des crédits subprime sont fixés à partir du Libor.

^{3.} Parmi les plus importantes : Commodity Futures Trading Commission aux États-Unis, Financial Services Authority (devenue Financial Conduct Authority en avril 2013) et Serious Fraud Office en Grande-Bretagne, Commission européenne en Europe et Autorité fédérale de surveillance des marchés financiers en Suisse.

- 1. Une littérature économétrique, fondée sur l'analyse des contributions soumises par les banques, rend compte de la manipulation par son ampleur.
- 2. Une littérature théorique qui propose de modéliser les comportements des acteurs de la manipulation. Très souvent, elle est associée à des contributions de *mechanism design* destinées à rendre plus robuste le calcul du Libor, voire à proposer des indicateurs alternatifs.

2.1 Littérature économétrique

Les lectures empiriques de la manipulation reposent pour l'essentiel sur l'étude des contributions des banques au panel. Ainsi, l'analyse des contributions soumises par les banques menée par Rosa Abrantes-Metz, Michael Kraten, Albert Metz et Gim Seow (2012) souligne la possibilité de pratiques anticoncurrentielles et, même sans valider totalement l'existence d'un biais sur le taux, reconnaît que de nombreuses banques contributrices ont eu des positions très différentes sur le marché des CDS (*Credit Default Swap*) et dans le panel du Libor. En cela, leur méthodologie rejoint celle de Connan Snider et Thomas Youle (2010) qui montrent à partir de données de panel que les taux soumis par les banques sont difficilement rationalisables en regard de mesures observables de leurs coûts ou même de leurs contributions à d'autres panels.

Dennis Kuo, David Skeie et James Vickery (2012) d'une part et Andrea Monticini et Daniel Thornton (2013) d'autre part complètent cette approche en ajoutant à la comparaison d'autres indicateurs de santé financière des banques (comme leurs enchères pour les offres de refinancement auprès de la FED lors des term auction facilities). Même s'ils divergent quant aux conséquences sur le degré de manipulation (au sens de son écart à sa valeur théorique) du Libor, ces deux articles montrent que les contributions des banques du panel figurent sous les mesures alternatives proposées au plus fort de la crise.

Toutes ces études ont pour point commun de souligner l'existence de distorsions dans les contributions, avec un biais induit sur le Libor parfois présenté comme incertain pour (Abrantes-Metz et al., 2012) ou plus fermement établi pour (Monticini et Thornton, 2013).

Un second point commun de ces approches réside dans leur focalisation quasi-exclusivement empirique, l'accent étant mis sur les instruments financiers à même d'établir la fraude plus que sur la structure économique des incitations des banques et de leurs contributeurs chargés de soumettre les taux à la BBA.

2.2 Littérature théorique

Certains articles essaient par ailleurs de formuler quelques prédictions théoriques afin de pouvoir les tester économétriquement. Les premiers à avoir étudié le Libor dans un modèle théorique ont été Snider et Youle (2010). Ils ont esquissé un modèle qui prévoit le regroupement des annonces des banques autour du quantile pivot de 2,7 % et de 75 %. Comme le LIBOR est calculé sur une base quotidienne et que les cotations ne diffèrent normalement pas beaucoup de celles

de la veille, les banques ont une bonne connaissance de la prochaine cotation de leurs concurrents. Ainsi, par nature, les banques sont en mesure de prévoir avec précision l'intervalle des cotations prises pour le calcul du Libor réel et peuvent optimiser la position de leur propre cotation à l'intérieur de cet intervalle, ce qui implique le regroupement des cotations aux frontières. Ainsi, Snider et Youle (2014) comparent les distributions des contributions optimales au panel d'après un modèle théorique et les valeurs effectivement soumises de 2005 à 2011. Leur étude confirme la collusion.

Dans une perspective de *mechanism design*, ces études de la déclaration optimale pour une banque du panel peuvent naturellement conduire à des préconisations de réforme de l'indicateur en préservant peu ou prou son format actuel. Chen (2012) travaille dans un cadre bayesien où la réalisation de la valeur privée est la connaissance privée de la banque respective. La répartition de ces valeurs privées est identique et connue de tous les acteurs et du concepteur du mécanisme. Elle ne prend en compte que l'incitation des banques à baisser leur propre cotation. En ce sens, elle s'intéresse principalement aux incitations à la réputation des banques. Elle étudie les meilleures réponses des acteurs et propose un mécanisme pour résoudre le problème du Libor, dans l'esprit de d'Aspremont et Gérard-Varet (1979).

Ainsi, Diehl (2013), après avoir complété la fonction de gain maximisé par l'annonce de chaque banque de Snider et Youle (2014) par un terme de réputation (l'écart au Libor final pouvant signaler des difficultés à se refinancer), propose de ne plus révéler les contributions individuelles des banques au panel. Il ne remet toutefois pas en cause le calcul sous forme de moyenne tronquée, notamment en comparaison de la déviation optimale dans le cas d'une formule reposant sur la moyenne ou la médiane.

Tel n'est pas le cas de Duffie et Dworczak (2018), qui prônent une réforme de l'indicateur au profit d'un benchmark adossé à des transactions observables. Ils reprennent tout d'abord le constat de Duffie et Stein (2015) selon lesquels l'incitation à manipuler est d'autant plus grande que le marché interbancaire est d'une ampleur limitée en comparaison du montant des prêts adossés sur le Libor. Puis, ils représentent la construction du benchmark optimal comme un problème économétrique d'estimation dont les données dépendent elles-mêmes des méthodes de construction de l'estimateur, puisque les banques ne déclarent pas les mêmes valeurs selon les méthodologies retenues par le régulateur. Leur méthode les conduit à privilégier un estimateur linéaire (volume-weighted average price – VWAP) dont les poids sont donnés par la solution d'une équation différentielle du second ordre. Ces poids optimaux sont proches de zéro pour les transactions de faible montant et plafonnés pour les transactions aux montants les plus élevés.

Dupéret (2019) a montré qu'une manipulation a existé à une échelle *ho*rizontale entre des traders de différentes banques grâce à une convention de manipulation assise sur d'importants phénomènes de groupe, et de réputation.

Le pan de littérature consacrée à la manipulation sous l'angle des interactions stratégiques prouve que, dans un cadre proche des schémas de vote du Libor,

il s'avère que le vainqueur à la Condorcet n'est pas le seul schéma de vote à l'épreuve des stratégies (strategy proof) : en fait, selon Moulin (1980) tout schéma de vote à l'épreuve des stratégies, efficace et anonyme, est obtenu en ajoutant (n-1) bulletins fixes aux n bulletins des électeurs et en choisissant ensuite la médiane de cet ensemble plus large de bulletins. Cela permet d'obtenir une plus grande catégorie de procédures, toutes semblables à la procédure du pic médian, dans le cadre de laquelle la collectivité dans son ensemble influence la décision finale sans enfreindre l'exigence d'efficacité.

Plus spécifiquement, ce travail recourt à une modélisation en jeu bayesien. Nous reprenons le cadre d'analyse exposé dans Bergemann et Hege (2005). Un entrepreneur possède une idée mais a besoin d'un financement pour la réaliser. Or à chaque période le venture capitalist ne sait pas si l'entrepreneur a investi l'argent donné pour réaliser le projet ou s'il l'a détourné à des fins privées. Ainsi, à mesure que le jeu continue et que le projet ne se réalise pas, le financier ne sait pas s'il doit continuer à financer le projet en supervisant davantage l'entrepreneur ou s'il doit arrêter de donner de l'argent à ce projet. En effet, Bergemann et Hege ont montré que les agents (dans leur article, les entrepreneurs) expriment une forte préférence pour la poursuite de l'activité, indépendamment des considérations sur la valeur de continuation, que ce soit parce qu'ils sont (sur)confiants ou parce qu'ils essaient rationnellement de prolonger la recherche en détournant l'argent à des fins privés. Ils auraient tendance à utiliser leur pouvoir discrétionnaire pour (mal) représenter les progrès qui ont été réalisés afin d'obtenir un financement supplémentaire (Cornelli et Yosha, 2003). La renégociation complète du contrat est au cœur du problème d'agence dynamique, puisque l'entrepreneur voudrait s'engager ex ante sur un horizon de financement fini lorsqu'il se heurte à une contrainte de financement, mais un tel engagement serait nécessairement incohérent dans le temps. Bergemann et Hege (1998) n'examinent que le cas des actions non observables, alors que leur article de 2005 prend en compte le financement relationnel, qui est plus typique pour le financement de projets innovants et met au centre la comparaison entre le financement relationnel et le financement indépendant à la littérature sur les avantages des relations sans lien de dépendance dans les modèles d'agence. Ainsi ils sont plus proche de Crémer (1995), qui montre qu'une meilleure situation de l'agent d'information rend plus difficile l'engagement de l'agent à l'égard des sanctions.

La plupart de ces travaux ne prennent toutefois pas appui sur l'origine concrète, à l'échelle des traders, de la manipulation – notamment en étudiant les modes de coordination qui peuvent exister entre les différents acteurs impliqués dans cette dernière. A partir du procès à Londres en 2015 de Tom Hayes, un ancien trader d'UBS et de Citigroup, il analyse les registres de justification mobilisés, dans le cadre de l'épreuve que constitue le procès, par les différents acteurs. Il souligne le rapport très différent à la règle et à la vérité de différents acteurs des marchés financiers, confirmant en cela des travaux d'Ortiz (2014) sur les techniques d'évaluation de la valeur fondamentale des sociétés cotées.

L'avantage d'avoir mené le présent travail en 2020 est que la manipulation est désormais avérée, établie par les juridictions compétentes et reconnue par les banques inculpées elles-mêmes. Comment expliquer cette manipulation? Nombreux ont été les observateurs qui voyaient le Libor comme condamné à être manipulé par des agents financiers par essence aptes au calcul. Arrêter le débat à ce stade est cependant insuffisant, en particulier pour rendre compte aussi bien de l'émergence progressive du mensonge collectif que de l'ampleur de la manipulation de cet indicateur dont les vingt premières années d'existence n'avaient pas suscité d'émoi particulier.

C'est dans cette perspective que s'inscrit le présent travail, qui vise à comprendre aussi bien l'intérêt qu'ont eu les banques contributrices à mentir dans leurs déclarations que le système mis en place au sein même des banques entre différents échelons hiérarchique pour transformer de manière durable des mensonges individuels en manipulation effective.

3 Modélisation en interactions stratégiques

Cette section est organisée comme suit. Le modèle est présenté formellement dans la section (3.1) et résolu en une période dans la section (3.2). Nous considérons ensuite les prérequis pour la résolution dynamique dans la section (3.3), ce qui nous permet dans les sections (3.4) et (3.5) une résolution générale avec des agents dits myopes. A partir de la section (3.6) nous analyserons l'évolution du jeu avec des agents $non\ myopes$.

3.1 Introduction modèle

Dupéret (2019) a montré qu'une manipulation a existé à une échelle horizontale entre des traders de différentes banques grâce à une convention de manipulation assise sur d'importants phénomènes de groupe, et notamment de réputation. Ainsi, les traders ont pu se coordonner afin de manipuler stratégiquement le Libor à la baisse. Dans une perspective de théorie de l'agence, ce travail revenait à faire de la BBA le principal, qui espère d'un agent, les banques contributrices, la déclaration sincère d'un taux de marché dont seules ces dernières ont connaissance.

Le présent travail prétend démontrer qu'une manipulation a pu avoir lieu d'une manière *verticale* au sein d'une banque donnée et ainsi appréhende la relation d'agence comme suit :

— le principal : le supérieur hiérarchique du *trader*⁴ chargé de déclarer à la BBA son taux de refinancement.

^{4.} Les procédures judiciaires ont montré que très souvent les *submitters* à l'origine des taux utilisés dans le cadre du panel du Libor étaient de fait des *traders* utilisant le Libor pour leurs opérations. Très concrètement, les échanges de mails rendus publics font souvent référence à des *traders-submitters* incarnant simultanément les deux rôles.

— l'agent : le trader déclarant à la BBA son taux de refinancement.

Dans les deux cas, cela peut s'expliquer par le fait qu'un trader donné, en fonction des produits de son portefeuille arrivant à maturité un jour donné, peut avoir intérêt à ce qu'un certain Libor soit un peu plus haut ou un peu plus bas afin de maximiser le bénéfice qu'il retire de sa position. Les échanges de mails entre traders et contributeurs (submitters) des banques soulignent que cet intérêt individuel a fréquemment prévalu au cours de la manipulation. Si l'enjeu théorique primordial est dans le premier cas de savoir si les intérêts du principal (la BBA) sont alignés sur ceux de l'agent, ou si au contraire l'agent a intérêt à envoyer au principal un signal biaisé ne correspondant pas à ses conditions de marché effectives, un des enjeux principaux du présent travail est de comprendre la relation d'agence au sein même d'une banque où le submitter prend un risque en envoyant une fausse déclaration à la BBA. Dans les faits, les procédures judiciaires ont incriminé des traders de différents statuts; certains, décrits comme Senior Traders, sont davantage capables de faire valoir leurs intérêt. En ce sens, ils peuvent être présentés comme des principaux ayant négocié avec leur submitter un taux Libor favorable à leur portefeuille. Seul le trader responsable de la contribution au panel étant juridiquement à l'origine du mensonge, nous proposons d'inclure la perte en cas de sanction uniquement dans sa fonction de gain.

Contrairement aux autres banques, une banque du panel n'est pas indifférente au signal qu'elle envoie, puisque ce signal est constitutif d'un taux auquel elle sera elle-même sera soumise dans ses transactions. Cette asymétrie consubstantielle au Libor est normalement neutralisée par la muraille de Chine devant exister entre traders et submitters. Dans la mesure où une telle précaution n'a pas été mise en place dans les faits, le présent travail entend expliquer le mécanisme qui parmi les banques déclaratrices a pu alimenter la manipulation.

3.1.1 Cadre de résolution en interactions stratégiques

Un leader peut manipuler un indicateur sur un marché financier donné pour en obtenir une rente. Il ne peut l'acquérir qu'avec le concours d'un trader, qui doit pour ce faire manipuler un indice financier. Le modèle est présenté dans une forme générale mais s'inspire ici directement de la manipulation du Libor. Toutefois ils ne savent ni l'un ni l'autre si un régulateur existe et opère des contrôles sur ce marché. Pour ces deux joueurs, le régulateur existe avec une probabilité initiale α_1 et n'existe pas avec la probabilité $1-\alpha_1$.

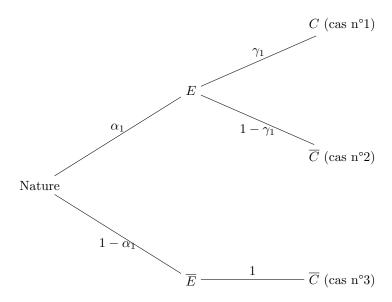
L'horizon temporel est discret et fini, les périodes de temps sont désignées par n=1,2,...,N.

Si le régulateur existe, alors la probabilité de se faire contrôler, sur une période donnée, est proportionnelle à l'ampleur de la manipulation au cours de cette période. Si le régulateur n'existe pas, la probabilité de se faire contrôler est nulle quelle que soit l'ampleur de la manipulation. Si les agents se font contrôler par le régulateur, le jeu s'arrête et seul le trader reçoit une sanction S>0 (sanction monétaire exogène connue au début du jeu).

Plus précisément, si le régulateur existe et que l'ampleur de la manipulation à la date n est d'une part γ_n de la manipulation maximale qui pouvait être envisagée, alors la probabilité de se faire contrôler vaut également γ_n (avec $\gamma_n \in [0, \overline{\gamma}]$, où $\overline{\gamma} < 1$), le régulateur ayant davantage de chances de repérer des fraudes d'une ampleur importante.

En conséquence, même si le régulateur existe, les traders peuvent toujours tricher sans se faire prendre, i.e. le régulateur ne peut jamais réussir avec certitude à détecter un manipulateur au cours d'une période de manipulation donnée – cela du fait de $\gamma_n < 1$.

Arbre de probabilité pour la période n=1



avec les événements :

- E : Existence du régulateur.
 - Elle est déterminée par l'état de la nature, inconnu des joueurs qui l'estiment par une probabilité subjective α_n à une période n.
- C: Contrôle des déclarations des joueurs par le régulateur. Ce contrôle, s'il a lieu et que l'indicateur a été manipulé au cours de la période n, marque la fin du jeu avec une probabilité γ_n .

On remarque qu'en \overline{C} les joueurs ne savent pas dans quel état de la nature ils se trouvent :

- $P_E(\overline{C})$: le trader ne se fait pas contrôler alors que le régulateur existe ;
- $P_{\overline{E}}(\overline{C})$: le trader ne se fait pas contrôler car le régulateur n'existe pas.

Ainsi, il existe une issue (\overline{C}) dans laquelle les traders ne peuvent connaître l'état du monde (existence ou non du régulateur) dans lequel ils se situent.

Lorsque la manipulation a lieu, les gains de la période sont répartis entre les deux parties de la manière suivante : une part β_n du gain pour le leader et une part $1 - \beta_n$ pour le trader (avec $\beta_n \in [0, 1]$).

Les gains en période n valent alors, dans chacun des cas :

Gains en période n

	Leader L (Principal)	Trader T (Agent)
Cas n°1	$\beta_n B(\gamma_n)$	$(1-\beta_n)B(\gamma_n)-S$
Cas n°2	$\beta_n B(\gamma_n)$	$(1-\beta_n)B(\gamma_n)$
Cas n°3	$\beta_n B(\gamma_n)$	$(1-\beta_n)B(\gamma_n)$

Le processus de manipulation produit de l'information sur la probabilité d'existence du régulateur. L'information à la période n correspond à la croyance postérieure (posterior belief) actualisée à la fin de la période n-1, résumée dans α_n qui constitue la croyance sur l'existence du régulateur en date n.

Le contrat : le leader ne peut réaliser la manipulation seul et doit obtenir le concours d'un trader pour réaliser sa manipulation. Par simplicité, même si dans le cas du Libor le leader à l'origine de la manipulation peut demander son aide à un ensemble de traders possible, on représente ici une interaction avec un seul trader. Selon le contrat proposé, le trader peut accepter ou refuser d'aider le leader. Le leader et le trader partagent la même évaluation de α_n et γ_n , qui influent sur la réussite espérée de la manipulation.

L'ampleur de la manipulation ainsi que les bénéfices tirés de cette dernière sont proposés par le leader au début du jeu pour l'ensemble des périodes possibles dans N contrats du type :

$$((\beta_1, \gamma_1); (\beta_2, \gamma_2); ...; (\beta_N, \gamma_N))$$

où pour mémoire on note :

- γ_n l'ampleur de la triche demandée à la date n par le leader au trader (avec $\gamma_n \in [0, \overline{\gamma}]$ et $\overline{\gamma} < 1$).
- β_n : part du gain pour le leader, où le gain est défini par la fonction B continue, deux fois différentiable et concave:

$$B: \left| \begin{array}{ccc} [0,\overline{\gamma}] & \longrightarrow & R_+^* \\ \gamma_n & \longmapsto & B(\gamma_n) \end{array} \right|$$

Au début de chaque période, le leader propose un contrat au trader sur la période à venir.

Si le contrat est accepté au cours de la période n (i.e. $\gamma_n > 0$) alors le trader triche de l'ampleur convenue. Le régulateur se manifeste, s'il existe, avec une probabilité γ_n . En cas d'absence de contrôle, le contrat convenu en période n s'applique aux périodes suivantes.

Si le contrat est rejeté, le leader en propose un nouveau à la période suivante.

Les sous-sections suivantes visent à préciser les spécifications qui découlent de cette première définition du cadre de résolution pour coller au plus près de la réalité de la manipulation du Libor.

3.1.2 La menace du régulateur

Le régulateur mentionné dans le cadre du jeu doit faire l'objet de deux précisions. D'une part, sa présence est considérée comme exogène et indépendante de la croyance des joueurs : il constitue le bras armé d'une justice qui fixe ex ante et applique ex post une sanction faisant partie de l'ensemble d'information de toutes les banques. Ainsi les joueurs peuvent penser que le régulateur existe en droit mais qu'aucune entité n'existe de fait pour les contrôler.

D'autre part, notons que par souci de simplicité il serait difficile de lui attribuer le visage unique d'un protagoniste de l'« affaire » du Libor : il est pour partie la BBA en ce qu'il demande aux banques de déclarer le vrai taux auxquelles elles sont confrontées, et pour partie les juridictions de contrôle compétentes au premier rang desquelles la Financial Supervision Authority (FSA) britannique.

3.2 Résolution en une période

3.2.1 Résolution générale

Cette section présente les intuitions et le trade off dans un cas simple en une période. Si le leader (noté L) fait une proposition de contrat, alors le trader $(\text{not\'e}\ T)$ ne l'acceptera que si sa contrainte de participation est satisfaite, i.e. si son espérance d'utilité excède son utilité de réserve (supposée égale à zéro) :

$$U_{[T,1]} \ge 0$$

$$\iff \alpha_1[\gamma_1((1-\beta_1)B(\gamma_1)-S)] + \alpha_1(1-\gamma_1)(1-\beta_1)B(\gamma_1) + (1-\alpha_1)(1-\beta_1)B(\gamma_1) \geq 0$$

$$\iff \alpha_1(1-\beta_1)B(\gamma_1) - S\gamma_1\alpha_1 + (1-\alpha_1)(1-\beta_1)B(\gamma_1) \ge 0$$

$$\iff \underbrace{(1-\beta_1)B(\gamma_1)}_{\text{Part du gain conservée par l'agent}} \geq \underbrace{S\gamma_1\alpha_1}_{\text{Coût du risque pris par l'agent}}$$

De la contrainte de participation il s'ensuit que le contrat n'est accepté par le trader que s'il satisfait :

$$\alpha_1 \le \frac{(1 - \beta_1)B(\gamma_1)}{S\gamma_1}$$

A l'équilibre, le leader propose au trader un contrat qui sature sa contrainte de participation, i.e. tel que:

$$\beta_1 = 1 - \frac{S\alpha_1\gamma_1}{B(\gamma_1)}$$

Etude de l'optimum si le contrat optimal est intérieur :

Le leader ne prend aucun risque dans ce jeu et souhaite uniquement maximiser sa rente issue de la manipulation.

$$\max_{\gamma_1,\beta_1} \mathbb{U}_{[L,1]}$$

avec

$$\mathbb{U}_{[L,1]} = \beta_1 B(\gamma_1)$$

Dans le cas où la solution est intérieure, le trader résout donc :

$$\max_{\gamma_1,\beta_1} \mathbb{U}_{[L,1]} \iff \max_{\gamma_1} \left(1 - \frac{S\gamma_1\alpha_1}{B(\gamma_1)}\right) B(\gamma_1)$$

$$\iff \max_{\gamma_1} B(\gamma_1) - S\gamma_1\alpha_1$$

Puisque le leader veut maximiser son bénéfice, il va demander au trader la plus grande triche possible qui reste acceptable pour le trader (contrainte de participation). Ainsi, si les conditions du premier ordre donnent une solution intérieure, le γ_1 optimal vérifie :

$$\frac{\partial B(\gamma_1)}{\partial \gamma_1} = S\alpha_1$$

Ainsi, si l'optimum est intérieur, la condition du premier ordre s'écrit comme :

$$B'(\gamma_1) = S\alpha_1$$

Comme on a considéré une fonction B de classe C^2 croissante concave, alors B' est continue et décroissante. D'après le théorème de la bijection, cette dernière est donc inversible, et on peut écrire :

$$\gamma_1^* = (B')^{-1}(S\alpha_1)$$

et

$$\beta_1^* = 1 - \frac{S\alpha_1(B')^{-1}(S\alpha_1)}{B((B')^{-1}(S\alpha_1))}$$

Etude de l'optimum si le contrat optimal est en coin :

Dans le cas où $(B')^{-1}(S\alpha_1) > \overline{\gamma}$, l'équilibre correspond à une solution en coin qui est caractérisée par :

$$(B')^{-1}(S\alpha_1) > \overline{\gamma} \iff S\alpha_1 < B'(\overline{\gamma}) \iff \alpha_1 < \frac{B'(\overline{\gamma})}{S}$$

où $\frac{B'(\overline{\gamma})}{S}$ est la $valeur\ pivot$ à partir de laquelle la solution intérieure devient en coin.

Par ailleurs, il n'y a pas de condition au bord sur β_1 car (i) $\beta_1 \geq 0$ (si négatif, alors le trader n'accepte pas le contrat), et (ii) $\beta_1 > 1$ est impossible.

Proposition 1 : dans le jeu à une seule période, le contrat optimal (β_1^*, γ_1^*) est défini par :

$$(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \begin{cases} \left(1 - \frac{S\alpha_1(B')^{-1}(S\alpha_1)}{B((B')^{-1}(S\alpha_1))}, (B')^{-1}(S\alpha_1)\right) & \text{si } \alpha_1 \ge \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \\ \left(\frac{B'(\overline{\gamma})}{S}, \overline{\gamma}\right) & \text{si } \alpha_1 \le \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \end{cases}$$

3.2.2 Application à une forme fonctionnelle logarithmique

Définissons la fonction de gain B de classe C^2 croissante et concave suivante :

$$B: \left| \begin{array}{ccc} [0,\overline{\gamma}] & \longrightarrow & R_+^* \\ \gamma_n & \longmapsto & \ln\left(1+\gamma_n\right) \end{array} \right|$$

Étude de l'optimum si le contrat optimal est intérieur :

$$\frac{\partial B(\gamma_1)}{\partial \gamma_1} = \frac{1}{1 + \gamma_1}$$

soit

$$\frac{1}{1+\gamma_1} = S\alpha_1$$

et donc l'optimum intérieur γ_1^* vérifie :

$$\gamma_1^* = \frac{1}{S\alpha_1} - 1 = \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}$$

Interprétation de $\gamma_1^*: S\alpha_1$ est par définition dans \mathbb{R}_+ , ensemble sur lequel γ_1^* est une fonction décroissante de α_1 et de S. Si α_1 ou S sont élevés, i.e. si la croyance en l'existence du régulateur est forte ou la sanction élevée, alors l'ampleur de la triche sera d'autant plus faible. De plus, on note dès à présent, en appliquant le résultat obtenu pour la forme générale, que l'optimum est intérieur dès lors que $\gamma_1^* < \overline{\gamma}$, i.e. $\frac{1}{\alpha_1 S} < 1 + \overline{\gamma}$.

La condition du premier ordre obtenue permet de résoudre l'optimum pour β_1 :

$$\beta_1 = 1 - \frac{S\gamma_1\alpha_1}{B(\gamma_1)} = 1 - S\alpha_1 \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1} \frac{1}{\ln(1 + \gamma_1)}$$

Donc

$$\beta_1^* = 1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)}$$

Interprétation de β_1^* : la fonction obtenue est décroissante de $S\alpha_1$. Plus la menace associée au fait de tricher est forte (α_1 ou S est grand), plus la part

conservée par le leader est faible. Intuitivement, cela signifie que le leader doit compenser davantage le trader si la menace perçue est importante.

<u>Synthèse</u>: vérifions que ces solutions intérieures conviennent en étudiant les conditions au bord. Les valeurs intérieures sont obtenues si et seulement si :

- 1. $\boxed{\gamma_1^*>0}$ Ceci est vrai si et seulement si $\frac{1}{S\alpha_1}-1>0 \Longleftrightarrow S\alpha_1<1$. Ainsi, on impose la condition $S\alpha_1<1$ nécessaire et suffisante pour avoir $\gamma_1^*>0$. Intuition: $\gamma_1^*\leq 0$ est censuré à 0 si et seulement si $S\alpha_1>1$. Logique car si le régulateur est menaçant (i.e. α_1 ou S élevés) alors le trader est désincité à tricher.
- 2. $\boxed{\gamma_1^* < \overline{\gamma}}$ Ceci est vrai si et seulement si :

$$\frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1} < \overline{\gamma} \iff 1 - S\alpha_1 < S\overline{\gamma}\alpha_1 \iff \frac{1}{1 + \overline{\gamma}} < S\alpha_1,$$

cette dernière condition étant vérifiée avec les valeurs intérieures obtenues. Intuition : on a d'autant plus envie de tricher que S ou α_1 est petit.

3. $\boxed{\beta_1^* < 1}^5$ Ceci est vrai si et seulement si :

$$1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)} < 1 \iff \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)} > 0$$

Or, depuis la première synthèse, la condition $S\alpha_1 < 1$ est imposée. Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)$ et $1 - S\alpha_1$ sont positifs. La condition ci-dessus est donc vérifiée et on a bien $\beta_1^* < 1$. Le fait que cette dernière condition soit toujours vraie signifie que le régulateur ne peut pas être si menaçant (S élevé ou α_1 élevé) qu'aucun contrat ne puisse être proposé par le leader au trader (i.e. que la part de la triche qui revient au leader soit supérieure ou égale à 1, et donc que le trader refuse toujours de manipuler).

Étude de l'optimum si le contrat optimal est en coin :

Dans le cas où γ_1^* issu de la solution intérieure dépasse $\overline{\gamma}$, i.e. si $\alpha_1 \leq \frac{1}{S(1+\overline{\gamma})}$, alors l'équilibre correspond à la solution en coin qui vaut :

$$\gamma_1^* = \overline{\gamma}$$

et donc

$$\beta_1^* = 1 - \frac{S\overline{\gamma}\alpha_1}{B(\overline{\gamma})} = 1 - \frac{S\overline{\gamma}\alpha_1}{\ln(1+\overline{\gamma})}$$

^{5.} On exclut bien le cas $\beta^*=1$ des solutions intérieures, car cela signifierait que le trader pourrait se faire sanctionner sans espoir d'un gain positif. Il refuserait alors tout contrat

Vérifions que cette solution en coin convient, i.e. que $\gamma^* = \overline{\gamma}$ induit un $\beta_1^* < 1$ tel que le trader accepte le contrat.

$$\beta_1^* < 1 \iff 1 - \frac{\overline{\gamma}\alpha_1 S}{B(\overline{\gamma})} < 1 \iff -\frac{\overline{\gamma}\alpha_1 S}{B(\overline{\gamma})} < 0 \iff -\frac{\overline{\gamma}\alpha_1 S}{\ln\left(1 + \overline{\gamma}\right)} < 0$$

Ceci est vrai, car le numérateur et le dénominateur sont toujours positifs.

Conclusion : synthèse des équilibres du jeu à une période.

Avec la forme fonctionnelle logarithmique retenue, le contrat optimal $(\beta_1^*; \gamma_1^*)$ est défini par :

$$(\beta_1^*; \gamma_1^*) = \begin{cases} (1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)}, \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}) \text{ si } \alpha_1 \ge \frac{1}{S(1 + \overline{\gamma})} \\ (1 - \frac{S\overline{\gamma}\alpha_1}{\ln\left(1 + \overline{\gamma}\right)}, \overline{\gamma}) \text{ si } \alpha_1 \le \frac{1}{S(1 + \overline{\gamma})} \end{cases}$$

Notons que l'on peut aussi vérifier la continuité en $\overline{\gamma}=\frac{1-S\alpha_1}{S\alpha_1}$:

$$\beta^{bord} = 1 - \frac{S\alpha_1 \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}}{\ln\left(1 + \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}\right)} = 1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)} = \beta_1^{int}$$

3.3 Pré-requis pour une résolution en plusieurs périodes : la dynamique des α_n (bayesian updating)

Cette section consiste à poser un lemme préalable à toute résolution du jeu en plusieurs périodes.

L'incertitude quant à la nature du régulateur est levée de plus en plus probablement au cours du temps, car les manipulations successives – associées au fait de se faire prendre ou de ne pas se faire prendre – génèrent progressivement de l'information. L'évolution de la posterior belief α_{n+1} , conditionnellement à l'événement avoir triché sans se faire prendre à la période n, donne, par application de la règle de Bayes, en fonction de la priorbelief antérieure et de l'ampleur de la manipulation :

$$P_{\overline{C}_t}(E) = \frac{P(E)P_E(\overline{C}_t)}{P(\overline{C}_t)}$$

avec les événements :

- E : existence du régulateur.
 - Elle est subjective et propre aux agents (indépendante de la nature).
- C_t : contrôle des déclarations des joueurs par le régulateur à la date t.

Lemme 1 : la dynamique de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n (1 - \gamma_n)}{1 - \alpha_n \gamma_n}$$

Ainsi, $\alpha_{n+1} < \alpha_n \iff \frac{\alpha_n(1-\gamma_n)}{1-\alpha_n\gamma_n} < \alpha_n \iff \frac{1-\gamma_n}{1-\alpha_n\gamma_n} < 1 \iff 1 > \alpha_n$, ce qui est vrai par définition de α_n . Ainsi la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Lemme 2 : la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Le posterior belief diminue donc avec le temps si le trader ne se fait pas prendre lors d'une période de manipulation.

Remarque : Si les deux joueurs croient tous les deux en l'absence du régulateur dès la première période (i.e. $\alpha_1 = 0$) alors, quelle que soit l'existence réelle du régulateur, $\alpha_n = 0$. On peut appeler ce cas limite croyance en l'absence de régulateur. Cette croyance peut être vraie ou bien fausse. Dans le premier cas, la manipulation est d'une ampleur γ_n jusqu'à la dernière période du jeu et les joueurs ne sont jamais contrôlés. Dans le second cas, les joueurs se font contrôler avec une probabilité γ_n à chaque période n; le jeu peut alors s'arrêter avant la dernière période N. S'il existe une répartition des gains β_n conduisant à un niveau de triche γ_n (potentiellement son niveau maximal $\overline{\gamma}$), ce niveau sera assuré jusqu'à la fin du jeu, c'est-à-dire jusqu'au contrôle du régulateur (s'il existait malgré la croyance initiale) ou jusqu'à la dernière période du jeu en horizon fini (si le prior α_1 correspondait bien à la réalité).

3.4 Résolution pour des agents myopes sur deux périodes

3.4.1 Résolution générale

Cette section présente les intuitions et trade-offs dans un exemple simple à deux périodes. Dans ce contexte, nous pouvons analyser l'équilibre contractuel par induction à rebours (backward induction). Cela revient à remonter la résolution du jeu de la dernière période vers la première. Contrairement au raisonnement par récurrence en mathématiques, il est donc nécessaire qu'il y ait une fin. Par backward induction, on calcule alors les équilibres parfaits de chaque sous-jeu du jeu séquentiel en 2 périodes.

Résolution:

Supposons que le leader et le trader partagent la même croyance sur l'existence du régulateur durant les deux périodes. Si le leader fait une proposition de contrat pour les deux périodes, alors le trader ne l'acceptera que si sa contrainte de participation est satisfaite, i.e. si l'espérance de gain excède son utilité de réserve (comme dans le premier modèle).

<u>A la période 2,</u> le trader T accepte le contrat à partir du moment où l'utilité espérée qui sera retirée de ce dernier est supérieure de son utilité de réserve.

 $\mathbb{U}_{[T,2]} \geq 0$ (l'utilité de réserve)

$$\iff \underbrace{(1-\beta_2)B(\gamma_2)}_{\text{Part du gain pour le trader à la période 2}} \geq \underbrace{S\gamma_2\alpha_2}_{\text{Coût du risque pris par l'agent à la période 2}}$$

A l'équilibre, le leader propose au trader un contrat qui sature sa contrainte de participation:

$$\beta_1 = 1 - \frac{S\alpha_1\gamma_1}{B(\gamma_1)}$$

De manière générale, pour le leader aux anticipations myopes, résoudre le problème à deux périodes revient à résoudre de manière indépendante la période 2 puis la période 1. Le leader ne prend, en effet, pas en compte une utilité intertemporelle – ni par une somme ni par une actualisation en période 1 – et peut donc proposer une utilité de réserve égale à 0 au trader myope.

Ainsi cela revient à résoudre deux sous-jeux indépendants et identiques à celui résolu dans le cas précédent en commençant par la période 2, étant simplement précisé que la période 2 peut ne pas advenir en cas de contrôle ayant suivi une manipulation à la période 1 :

$$\max_{\gamma_2,\beta_2} \mathbb{U}_{[L,2]} \text{ avec } \mathbb{U}_{[L,2]} = \beta_2 B(\gamma_2)$$

Si l'optimum est intérieur, alors la condition de premier ordre est : F.O.C.

$$B'(\gamma_2) = S\alpha_2$$

Ainsi,

$$\gamma_2^* = (B')^{-1}(S\alpha_2)$$

et donc:

$$\beta_2^* = 1 - \frac{S\alpha_2(B')^{-1}(S\alpha_2)}{B((B')^{-1}(S\alpha_2))}$$

De même, à la période 1, puisque les sous-jeux sont similaires et ne dépendent que du α_n de la période courante, si l'optimum est intérieur, la condition du premier ordre s'écrit comme :

F.O.C.

$$B'(\gamma_1) = S\alpha_1$$

Ainsi,

$$\gamma_1^* = (B')^{-1}(S\alpha_1)$$
$$\beta_1^* = 1 - \frac{S\alpha_1(B')^{-1}(S\alpha_1)}{B((B')^{-1}(S\alpha_1))}$$

Proposition 2 : dans le jeu à deux périodes avec des anticipations myopes, le

contrat optimal est défini par :

$$((\beta_{1}^{*};\gamma_{1}^{*});(\beta_{2}^{*};\gamma_{2}^{*})) = \begin{cases} \left(1 - \frac{S\alpha_{1}(B')^{-1}(S\alpha_{1})}{B((B')^{-1}(S\alpha_{1}))},(B')^{-1}(S\alpha_{1});1 - \frac{S\alpha_{2}(B')^{-1}(S\alpha_{2})}{B((B')^{-1}(S\alpha_{2}))},(B')^{-1}(S\alpha_{2})\right) \\ \text{si } \alpha_{1} \geq \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \text{ et } \alpha_{2} \geq \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \\ \left(\frac{B'(\overline{\gamma})}{S},\overline{\gamma};\frac{B'(\overline{\gamma})}{S},\overline{\gamma}\right) \text{ si } \alpha_{1} \leq \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \text{ et } \alpha_{2} \leq \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \\ \left(1 - \frac{S\alpha_{1}(B')^{-1}(S\alpha_{1})}{B((B')^{-1}(S\alpha_{1}))},(B')^{-1}(S\alpha_{1});\frac{B'(\overline{\gamma})}{S},\overline{\gamma}\right) \text{ si } \alpha_{1} \geq \frac{B'(\overline{\gamma})}{S} \geq \alpha_{2} \end{cases}$$

3.4.2 Application à une forme fonctionnelle logarithmique

Définissons la fonction de gain B de classe \mathbb{C}^2 et concave suivante suivante :

$$B: \left| \begin{array}{ccc} [0,\overline{\gamma}] & \longrightarrow & R_+^* \\ \gamma_n & \longmapsto & \ln\left(1+\gamma_n\right) \end{array} \right|$$

1° Contrat optimal – Étude de la période 2 :

Étude de l'optimum si le contrat optimal est intérieur :

$$\gamma_2^* = \frac{1}{S\alpha_2} - 1 = \frac{1 - S\alpha_2}{S\alpha_2}$$

Donc,

$$\beta_2^* = 1 - \frac{1 - S\alpha_2}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_2}\right)}$$

Synthèse : les vérifications des solutions intérieures sont analogues à celles développées dans le modèle précédent (sous-section 3.2.2).

Étude de l'optimum si le contrat optimal est en coin :

Dans le cas où $\alpha_2 \leq \frac{1}{S(1+\overline{\gamma})}$, l'équilibre correspond toutefois à la solution en coin qui vaut alors $\gamma_2^* = \overline{\gamma}$ et donc :

$$\beta_2^* = 1 - \frac{S\overline{\gamma}\alpha_2}{B(\overline{\gamma})} = 1 - \frac{S\overline{\gamma}\alpha_2}{\ln(1+\overline{\gamma})},$$

où les vérifications sont analogues à celles de la sous-section 3.2.2.

 $\frac{\text{Remarque}}{n=1\text{ et }n}: \text{si }\beta_1^* \text{ et }\beta_2^* \text{ sont en coin, alors la part gardée par le leader croît entre }n=1\text{ et }n=2\text{ car le leader a moins à compenser le trader.}$

2° Contrat optimal - Étude de la période 1 :

A la période 1, l'utilité du trader s'obtient de la même façon que pour les jeux précédents.

Ainsi, on peut conclure que le contrat optimal proposé par le leader en n=1 pour la période 1 et 2 est de la forme :

$$((\beta_1^*, \gamma_1^*); (\beta_2^*; \gamma_2^*)) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)}, \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}\right); \left(1 - \frac{1 - S\alpha_2}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_2}\right)}, \frac{1 - S\alpha_2}{S\alpha_2}\right) \text{ si } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \ge \frac{1}{S(1 + \overline{\gamma})} \\ \left(1 - \frac{S\alpha_1 \overline{\gamma}}{\ln\left(1 + \overline{\gamma}\right)}, \overline{\gamma}\right); \left(1 - \frac{S\alpha_2 \overline{\gamma}}{\ln\left(1 + \overline{\gamma}\right)}, \overline{\gamma}\right) \text{ si } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \le \frac{1}{S(1 + \overline{\gamma})} \\ \left(1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_1}\right)}, \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}\right); \left(1 - \frac{S\alpha_2 \overline{\gamma}}{\ln\left(1 + \overline{\gamma}\right)}, \overline{\gamma}\right) \text{ si } \alpha_1 \ge \frac{1}{S(1 + \overline{\gamma})} \ge \alpha_2 \end{cases}$$

3.5 Généralisation pour des agents myopes dans un modèle à horizon infini

Généralisation à un modèle à horizon infini avec un changement d'intérieur à au bord entre n = 1 et n = N:

$$(\beta_{1}^{*}; \gamma_{1}^{*}; \beta_{2}^{*}; \gamma_{2}^{*}; ...; \beta_{N}^{*}; \gamma_{N}^{*}; ...) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1 - S\alpha_{1}}{\ln \frac{1}{S\alpha_{1}}}, \frac{1 - S\alpha_{1}}{S\alpha_{1}}\right); ...; \left(1 - \frac{1 - S\overline{\gamma}\alpha_{N}}{\ln(1 + \overline{\gamma})}, \overline{\gamma}\right); ...) \\ \text{si } \alpha_{1} \geq ... \geq \frac{1}{S(1 + \overline{\gamma})} \geq ... \geq \alpha_{n} \end{cases}$$

Proposition 3 : Cet équilibre met en évidence la dynamique du jeu avec l'existence d'au plus trois phases :

- 1. Si au début du jeu $S\alpha_1$ est assez grand pour qu'il existe une solution intérieure, alors à mesure que α_1 diminue, γ^* augmente.
- 2. Ceci vaut jusqu'à la période où le γ^* intérieur devient plus grand que $\overline{\gamma}$. Ce moment arrive quand :

$$\frac{1 - S\alpha_{n+1}}{S\alpha_{n+1}} \ge \overline{\gamma} \ge \frac{1 - S\alpha_n}{S\alpha_n}$$

où cette inégalité vaut du fait de la décroissance de la suite (α_n) montrée dans le lemme qui précède. ⁶

6. Vérification de la continuité en $\overline{\gamma}=1-\frac{1-S\alpha_1}{S\alpha_1}$:

$$\beta^{bord} = 1 - \frac{S\alpha_1 \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}}{\ln\left(1 + \frac{1 - S\alpha_1}{S\alpha_1}\right)} = 1 - \frac{1 - S\alpha_1}{\ln\frac{1}{S\alpha_1}} = \beta_1^{int}$$

3. A partir de ce moment, γ_n reste stationnaire et égal à $\bar{\gamma}$ du fait de la décroissance de la suite (α_n) . Toutefois, β continue d'augmenter pour tendre vers 1 sans jamais l'atteindre, et le jeu continue jusqu'au contrôle du régulateur (s'il existe) ou sinon jusqu'à la fin du jeu en période N.

3.5.1 Interprétations et graphiques

Interprétation 1 : interprétation statique lorsque γ_1^* est intérieur.

Du point de vue du régulateur, pour que les joueurs ne trichent pas il faut que la condition $1 < \frac{1}{S\alpha_1}$ ne soit pas respectée, i.e. que α_1 et S soient tels que $S\alpha_1 > 1$. Cela signifie que le régulateur doit soit (i) se rendre suffisamment présent pour que les joueurs croient à son existence (i.e. que la perception du régulateur soit grande), soit (ii) imposer une sanction (au moins perçue comme étant) élevée. Le régulateur peut être inexistant bien qu'une sanction ait été prévue : cela revient à dire que la règle de droit existe mais pas le service en charge de la faire appliquer.

Interprétation 2 : interprétation en statique comparative une fois atteint un γ^* en coin.

Si le régulateur n'existe pas, alors les α_n diminuent à chaque période n. Donc les traders continuent à tricher mais ne peuvent tricher davantage que $\gamma^*(=\overline{\gamma})$. Toutefois les β , eux, continuent à augmenter. Ainsi, le leader du groupe s'enrichit davantage, bien que ce ne soit pas lui qui supporte le risque de sanction. A noter, une fois les γ en coin, les efforts du régulateur pour paraître existant $\overline{\alpha}$ avoir une sanction suffisamment dissuasive n'ont d'effet que s'ils sont suffisamment importants. Il n'y a d'effet marginal sur la réduction de la triche que si les S augmentent ou les α augmentent fortement – suffisamment pour faire repasser γ en solution intérieure.

Interprétation 3 : vitesse de la dynamique d'apprentissage.

Si γ n'est pas en coin au début du jeu, alors il existe un passage d'un équilibre à un autre. Il existe un chemin optimal des γ successifs suivant les périodes. Il est intéressant de noter que ce chemin dépend de la valeur initiale de α_1 . Plus α_1 est grand, et plus le fait de ne pas se faire prendre entraı̂ne un apprentissage important. Cela peut se comprendre avec l'intuition que les joueurs corrigent d'autant plus une erreur de croyance (du moins perçue comme telle par l'absence de contrôle) que cette croyance semblait plus certaine au départ. La vitesse d'apprentissage est donc plus rapide dans la mesure où l'erreur a posteriori s'avère plus grande.

Dans le détail, l'évolution dépend des conditions initiales du système, et notamment du premier prior des deux joueurs. Les simulations présentées page suivante sont établies pour les conditions initiales $\alpha_0 = 0, 5$ et S = 3. Elles montrent la dynamique d'ensemble des paramètres α , β et γ à partir des résultats obtenus. La progression est conforme aux analyses obtenues numériquement, au sens où

l'absence de contrôle va de pair avec la décroissance du prior α et l'accroissement de la part de la manipulation γ .

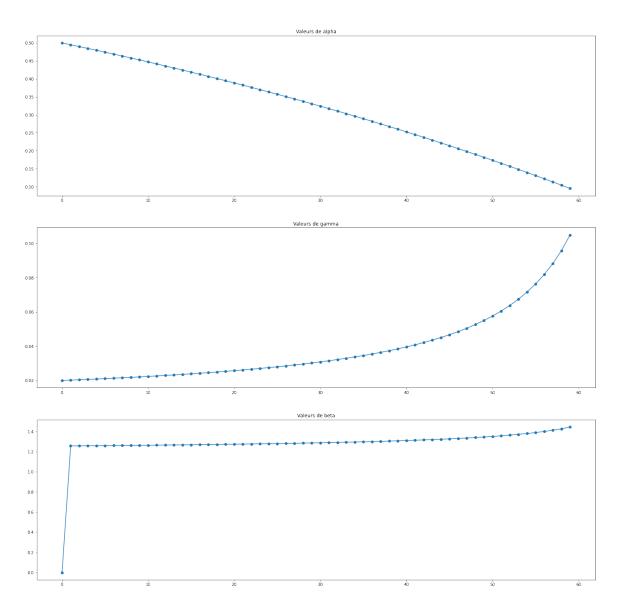


FIGURE 2 – Simulation pour les 60 premières valeurs des paramètres $\alpha,\,\beta$ et γ dans le cas où $\alpha_0=0,5$ et S=3

3.5.2 De l'analyse du modèle à celle du Libor

- 1. Les gains face à l'effacement du régulateur. Si la BBA ne définit pas de sanction S ou que Thomson Reuters (collecteur des données) ni, surtout, la FSA ⁷ (régulateur britannique) laissent trop de doutes quant à leur existence, alors il est rationnel que l'ampleur de la manipulation, si elle commence, augmente. Même face à une sanction élevée, les traders ont aussi pu choisir de manipuler l'indicateur du fait de la perspective de gains considérables en regard de la sanction.
 - <u>Conclusion</u>: le régulateur a utilisé insuffisamment S et α_n pour éviter la manipulation du Libor.
- 2. La dynamique sur plusieurs décennies du rapport des traders au Libor. A mesure que le jeu continue, les α_n diminuent, ce qui entraı̂ne une augmentation des γ_n . Ainsi, les leaders sont ceux qui tirent le plus de profit de la rente de manipulation par un double canal : (i) la taille du bénéfice $B(\gamma_n)$ augmente et (ii) la part du bénéfice β_n qui leur est accordée aussi. Ceci peut expliquer pourquoi on ne retrouve que quelques leaders/traders devant une juridiction pénale : ceux qui étaient les plus influents et donc qui captaient l'essentiel de la rente.
- 3. L'accroissement de la manipulation à l'origine de sa révélation. Au début, les leaders craignent le régulateur et sa sanction potentielle, donc $S\alpha_n$ est élevé (soit ils craignent la sanction, soit ils craignent l'existence du régulateur). La triche reste petite (petit γ_n), ce qui fut visiblement le cas dans les années 1960 (telles que décrites par Minos Zombanakis, qui affirme qu'il n'y avait pas de manipulation) avant que les premiers soupçons quant à la véracité des contributions émergent dans les années 1990. Ces périodes de manipulation limitée (correspondant à un γ_n intérieur au début du jeu) ont effectivement été suivies de périodes, dans les années 2000, de manipulation plus importantes et plus enrichissantes pour les traders (leaders dans le jeu) qui en ont tiré profit.

Ce processus continue jusqu'à ce que l'ampleur de la manipulation devienne maximale $(\gamma_n = \overline{\gamma_n})$. Arrivé à ce point $(\gamma_n$ en coin) où la manipulation continue mais n'augmente plus dans son ampleur, la rémunération totale des leaders continue à augmenter via l'augmentation des β_n (années 1980 jusqu'en 2007).

Il est à noter que c'est bien γ et non β qui est à l'origine de la dénonciation de la manipulation. En effet, les articles du Wall Street Journal à l'origine de la révélation ont été fondés sur la construction d'un modèle contrefactuel soulignant l'ampleur de la manipulation du Libor (γ_n) plus que l'enrichissement des manipulateurs (β_n) . Cela correspond bien à l'intuition du modèle : c'est l'accroissement de γ_n qui correspond à celui de la probabilité de contrôle, et donc de se faire prendre. Dans le cas du Libor, il est remarquable que ce contrôle soit toutefois intervenu par une instance a priori extérieur au jeu (la presse), qui peut alors être analysée comme

^{7.} Financial Services Authority, devenu aujourd'hui Financial Conduct Authority.

une forme de régulation.

N.B: dans le cadre du modèle, il est intéressant de noter qu'il n'est pas nécessaire d'atteindre l'ampleur maximale de la manipulation pour déclencher un contrôle, mais simplement que l'augmentation des γ_n^* intérieurs peut jouer ce rôle.

3.6 Au-delà de la myopie

3.6.1 Étude du cas général en deux périodes

On entend traiter ici, dans le même cadre de modélisation, la résolution quand les joueurs maximisent dès la période 1 leur utilité totale sur les deux périodes. Concrètement, il s'agit pour le leader de maximiser son utilité intertemporelle incluant, sans actualisation, son utilité des deux périodes, sous la même contrainte de participation réécrite ici comme la nullité de l'utilité espérée par le trader sur les deux périodes. En cas de manipulation, cela permet aussi de prendre en compte la probabilité que le jeu s'arrête à la suite d'un contrôle à la fin de la période 1.

<u>Pour rappel</u>, nous nous situons dans un cadre de contrats à court terme qui se succèdent. Dans un jeu en interactions stratégiques, les joueurs ne proposent que des contrats qui seront acceptés afin de respecter la contrainte de rationalité (i.e. *contrainte de participation*).

Pour cela, on note:

 $\mathbb{U}_{n,j}$: utilité intratemporelle du joueur j à la période n.

 \mathbb{V}_j : utilité intertemporelle de j.

On écrit alors l'utilité espérée à la période 1 de la période 2 pour l'agent i avec $i \in [T,L]$ comme :

Pour le trader :

$$\mathbb{E}_1[\mathbb{U}_{2,T}(\gamma_2,\beta_2)] = (1-\beta_2)B(\gamma_2) - S\gamma_2\alpha_2$$

<u>Pour le leader</u>, le contrat proposé au trader pour la seconde période (γ_2, β_2) rend l'espérance d'utilité du trader en période 2 égale à son utilité de réserve 0. Le programme intertemporel du trader est ici le même que lorsqu'il était myope.

$$\mathbb{V}_{L} \geq 0$$

$$\iff [\alpha_{1}(1-\gamma_{1})+(1-\alpha_{1})](\beta_{1}B(\gamma_{1})+\mathbb{U}_{[L,2]}(\alpha_{2}))+\alpha_{1}\gamma_{1}\beta_{1}B(\gamma_{1})\geq 0$$

$$\iff \beta_{1}B(\gamma_{1})+(1-\alpha_{1}\gamma_{1})\mathbb{U}_{[L,2]}(\alpha_{2}))\geq 0$$

$$\iff \beta_{1}B(\gamma_{1})+(1-\alpha_{1}\gamma_{1})\beta_{2}(\gamma_{1})B(\gamma_{2}^{*}(\alpha_{2}))\geq 0$$

$$\iff \beta_{1}B(\gamma_{1})+(1-\alpha_{1}\gamma_{1})\beta_{2}(\gamma_{1})B(\gamma_{2}^{*}(\alpha_{1},\gamma_{1}))\geq 0$$

$$\iff \beta_{1}B(\gamma_{1})+(1-\alpha_{1}\gamma_{1})\beta_{2}(\gamma_{1})B(\gamma_{2}^{*}(\alpha_{1},\gamma_{1}))\geq 0$$
(3.1)

Note : à partir d'ici, γ_2^* définit implicitement une fonction de γ_1 et α_1 donnée par les solutions du programme de maximisation de la période 1. Le leader résout donc le programme suivant :

$$\max_{\gamma_1, \beta_1} \mathbb{V}_L = \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \beta_2(\gamma_1) B(\gamma_2^*(\beta_1, \gamma_1))$$

dont on peut donner les conditions de premier ordre pour interpréter les équilibres induits dans ce cadre.

Étude du γ_1 optimal :

$$\frac{\partial \mathbb{V}_L}{\partial \gamma_1} = \beta_1 \frac{\partial B(\gamma_1)}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial \beta_2(\gamma_1)}{\partial \gamma_1} B(\gamma_2^*(\beta_1, \gamma_1)) + \beta_2(\gamma_1) \frac{\partial B(\gamma_2^*(\beta_1, \gamma_1))}{\partial \gamma_1}$$

$$-[\alpha_{1}\beta_{2}(\gamma_{1}) + \alpha_{1}\gamma_{1}B(\gamma_{2}^{*}(\beta_{1}, \gamma_{1}))\frac{\partial \beta_{2}(\gamma_{1})}{\partial \gamma_{1}} + \alpha_{1}\gamma_{1}\beta_{2}(\gamma_{1})\frac{\partial \gamma_{2}^{*}(\beta_{1}, \gamma_{1})}{\partial \gamma_{1}}\frac{\partial B(\gamma_{2}^{*}(\beta_{1}, \gamma_{1}))}{\partial \gamma_{1}}]$$

$$\iff \frac{\partial \mathbb{V}_{L}}{\partial \gamma_{1}} = \underbrace{\beta_{1}\frac{\partial B(\gamma_{1})}{\partial \gamma_{1}}}_{I} - \underbrace{\alpha_{1}\beta_{2}(\gamma_{1})B(\gamma_{2}^{*}(\beta_{1}, \gamma_{1}))}_{II}$$

$$+\underbrace{(1-\alpha_1\gamma_1)\frac{\partial\beta_2(\gamma_1)}{\partial\gamma_1}B(\gamma_2^*(\beta_1,\gamma_1))}_{III} +\beta_2(\gamma_1)\underbrace{\frac{\partial B(\gamma_2^*(\beta_1,\gamma_1))}{\partial\gamma_1}}_{IV}[1-\alpha_1\gamma_1\frac{\partial\gamma_2^*(\beta_1,\gamma_1)}{\partial\gamma_1}]$$

Interprétations d'une hausse de γ_1 :

- (I) Effet immédiat en période 1 : accroissement du bénéfice B(.) de la période 1 dans la proportion β_1 du contrat.
- (II) Manque à gagner pour le leader en n=2 si l'augmentation de γ_1 a débouché sur le contrôle en t=1 (dans le cas où le régulateur existe). Le leader aurait pu gagner $\beta_2 B(\gamma_2)$ en seconde période si le trader ne s'était pas fait contrôler en n=1.
- (III) et (IV) Sous l'hypothèse que la hausse de γ_1 n'a pas débouché sur un contrôle et que les joueurs ne peuvent renégocier le contrat de n=2, l'effet sur la proportion β_2 conservée par le leader se décompose comme :
 - (III) l'effet induit par γ_1 sur la part β_2 gardée du gain issu de la manipulation en période 2. L'augmentation de l'ampleur de la manipulation γ_1 permet, en l'absence de contrôle, d'apprendre plus rapidement ce qui permet de moins compenser le trader en période 2. Il s'agit d'un effet d'inertie, de persistence de la hausse de γ_1 qui permet d'obtenir une hausse par conséquent plus importante de β_2 grace à cet apprentissage plus rapide.
 - (IV) l'effet induit sur le gain de la période 2 lié à l'ampleur accrue de la manipulation. L'accroissement de γ_1 accélère l'apprentissage du fait du plus grand risque pris, et donc de la probabilité accrue d'un

contrôle qui n'a *a posteriori* pas eu lieu. Cela signifie que la décroissance de α_2 est plus rapide de même, donc, que la croissance de l'ampleur de la manipulation qui peut être conservée par le leader.

Etude du β_1 optimal :

$$\frac{\partial \mathbb{V}_L}{\partial \beta_1} = \underbrace{B(\gamma_1)}_{I} + \beta_2 (1 - \alpha_1 \gamma_1) \underbrace{\frac{\partial \gamma_2^*(\beta_1, \gamma_1)}{\partial \beta_1}}_{II} \underbrace{\frac{\partial B(\gamma_2^*(\beta_1, \gamma_1))}{\partial \beta_1}}_{III}$$

Interprétations d'une baisse de β_1 :

- (I) Renonciation immédiate en période 1 au gain associé à une part plus faible du bénéfice issu de la manipulation d'une ampleur γ_1 donnée (gâteau de même taille mais part plus petite).
- (II) et (III) L'effet sur la proportion β_2 conservée par le leader se décompose comme l'effet sur l'ampleur de la manipulation en n=2 qui a des conséquences sur le bénéfice total de la période B(.), sous l'hypothèse que la hausse de γ_1 n'ait pas débouché sur un contrôle et que les joueurs ne peuvent renégocier le contrat en n=2:
- (II) la part plus grande laissée au trader aujourd'hui peut servir à ce qu'il accepte un contrat permettant de manipuler plus demain...
- (III)... ce qui débouche sur un gain plus grand issu de la hausse de γ_2 induite.

 $\underline{\text{Conclusion}:} \ \text{l'utilité intertemporelle du leader est déterminée en espérance } \\ \text{dès la période 1 comme}:$

$$V_{L} = \beta_{1}B(\gamma_{1}) + (1 - \alpha_{1}\gamma_{1})\beta_{2}(\gamma_{1})B(\gamma_{2}^{*}(\beta_{1}; \gamma_{1}))$$

Oiì

$$\beta_2(\alpha_1)B(\gamma_2^*(\beta_1,\gamma_1)) = \left\{ \begin{array}{l} \beta_2(\alpha_1)B\left(\frac{1-S\alpha_2}{S\alpha_2}\right) \text{ si la solution est intérieure i.e. } \alpha_2 \geq \frac{1}{S(1+\overline{\gamma})} \\ \beta_2(\alpha_1)B(\overline{\gamma}) \text{ si la solution est en coin i.e. } \alpha_2 \leq \frac{1}{S(1+\overline{\gamma})} \end{array} \right.$$

NB : $(1 - \alpha_1 \gamma_1)$ peut être interprété comme une probabilité de survie.

3.6.2 Application à une forme fonctionnelle logarithmique

Étude du contrat optimal pour des solutions intérieures avec cette spécification où $B(\gamma_1) = \ln(1 + \gamma_1)$ et $B(\gamma_2) = \ln(1 + \gamma_2)$

Étude de la période 2 :

A la période 2, le leader sature la contrainte de participation du trader

(i.e.
$$\mathbb{U}_{T,2} = 0$$
).

En effet, supposons que le leader se situe à la période 1, il ne sait pas si la période 2 va avoir lieu, toutefois il sait que si elle a lieu il pourra renégocier le contrat et ainsi, saturer la contrainte de participation du trader égale à son utilité de réserve 0. Ainsi, le leader peut avoir intérêt à proposer un contrat moins agressif pour que la période 2 ait plus de chance d'advenir (diminuer γ_1). La baisse de γ_1 va entraîner un bénéfice moins important et donc un gain total moins important. Ainsi, pour que le trader participe, le leader va devoir lui proposer une part plus importante du bénéfice plus petit. La question est de pouvoir comparer ce gain total par période à celui issu du cadre avec myopie.

Étude de la période 1 :

Grâce au raisonnement qui précède, nous savons que les solutions β_2 et γ_2 sont les mêmes que celles trouvées en état de myopie :

$$\gamma_2^* = \frac{1}{S\alpha_2(\gamma_1)} - 1 \text{ et } \beta_2^* = 1 - \frac{1 - S\alpha_2(\gamma_1)}{\ln\left(\frac{1}{S\alpha_2(\gamma_1)}\right)}$$

Le leader résout :

$$\begin{aligned} \max_{\beta_1,\gamma_1} \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \beta_2(\gamma_1) B(\gamma_2^*(\alpha_2)) \\ \iff \max_{\beta_1,\gamma_1} \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \beta_2(\gamma_1) B(\underbrace{\frac{1}{S\alpha_2(\gamma_1)} - 1}) \\ \iff \max_{\beta_1,\gamma_1} \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \beta_2(\gamma_1) \ln (1 + \frac{1}{S\alpha_2(\gamma_1)} - 1) \\ \text{or on sait que} : \beta_1 = 1 - \frac{S\gamma_1\alpha_1}{B(\gamma_1)} \text{; avec } B(\gamma_1) = \ln (1 + \gamma_1) \end{aligned}$$

Donc on peut réécrire le programme comme :

$$\max_{\beta_1, \gamma_1} \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \left(1 - \frac{1 - S\alpha_2}{\ln(\frac{1}{S\alpha_2})}\right) \ln\left(\frac{1}{S\alpha_2}\right)$$

$$\iff \max_{\beta_1, \gamma_1} \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \left(\ln\left(\frac{1}{S\alpha_2}\right) - 1 - S\alpha_2\right)$$

or on sait que par définition de (α_n) , $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1) = \frac{\alpha_1(1-\gamma_1)}{1-\alpha_1\gamma_1}$ Donc,

$$\max_{\beta_1, \gamma_1} \beta_1 B(\gamma_1) + (1 - \alpha_1 \gamma_1) \left(\ln \left(\frac{1 - \gamma_1 \alpha_1}{S\alpha_1 (1 - \gamma_1)} \right) - 1 - S\alpha_2 \right)$$

$$\iff \max_{\beta_1,\gamma_1}\beta_1B(\gamma_1) + (1-\alpha_1\gamma_1)(\ln\left(\frac{1-\gamma_1\alpha_1}{S\alpha_1(1-\gamma_1)}\right)) - (1-\alpha_1\gamma_1) - S\alpha_1(1-\gamma_1)$$

Si nous introduisons les fonctions f et g définies par $f(\gamma_1) = \beta_1 B(\gamma_1)$ et $g(\gamma_1) = (1 - \gamma_1 \alpha_1)\beta_2 B(\gamma_2)$

Alors, la dérivée de g (paiement de continuation de la période 2) par rapport à γ_1 vaut :

$$g'(\gamma_1) = -\alpha_1 \ln(\frac{1}{S\alpha_2}) + \frac{1-\alpha_1}{1-\gamma_1} + S\alpha_1 + \alpha_1$$

$$\iff \alpha_1 \ln S\alpha_2 + \frac{1 - \alpha_1}{1 - \gamma_1} + S\alpha_1 + \alpha_1$$

Or on sait que $S\alpha_2<1,$ $\ln(S\alpha_2)<0$ et $\alpha_1>\alpha_2>0.$ On en déduit que $S\alpha_1>S\alpha_2.$

De plus, on sait que si X > 0 alors $\ln(X) < X$, ce qui permet d'affirmer que $\ln(S\alpha_2) < S\alpha_2 < S\alpha_1$.

Et comme $\alpha_1 < 1$, on a donc $\alpha_1 \ln(S\alpha_2) < S\alpha_1$, ce qui permet finalement d'écrire :

$$\alpha_1 \ln(S\alpha_2) + S\alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{1 - \gamma_1} + \alpha_1 = g'(\gamma_1) > 0$$

Notons $\tilde{\gamma}_t$, le γ_t optimal obtenu au jeu au-delà de la myopie.

On sait qu'à l'optimum $f'(\tilde{\gamma}_1) + g'(\tilde{\gamma}_1) = 0$ Ainsi si $g'(\tilde{\gamma}_1) > 0$, alors $f'(\tilde{\gamma}_1) < 0$. Or on sait que dans notre jeu myope $f'(\alpha_1^*) = 0$. Ainsi puisque f est une fonction croissante concave on $a: \tilde{\gamma}_1 < \gamma_1^*$.

Interprétations:

Si dans le cas général nous ne sommes pas en mesure de conclure quant à la position de $\tilde{\gamma}$ par rapport au γ^* , l'application au cas spécifique du logarithme permet de tirer quelques enseignements :

- Renonciation immédiate à la période 1 par rapport au jeu avec myopie. Le $\tilde{\gamma}$, obtenu au jeu au-delà de la myopie, est plus petit que le γ optimal obtenu dans le jeu myope, noté γ^* . En effet, le leader prend en compte à la période 1, le gain possible de la période 2 qu'il espère obtenir. Ainsi il diminue la demande de triche du jeu sans myopie $(\tilde{\gamma}_1)$ par rapport au jeu myope afin de maximiser les chances d'obtenir aussi les gains de la période 2.
- Si le paiement de continuation est très croissant en γ_1 (i.e. le paiement de continuation de la deuxième période est très sensible à l'ampleur de la triche de la première période), alors il va falloir compenser d'autant plus le trader à la période 1 en augmentant le $\tilde{\beta}_1$ par rapport à β_1 .

4 Conclusion : une relecture de l'histoire de la manipulation

Le présent travail démontre qu'en raison de la faible — voire inexistante — présence avérée du régulateur, il a été rationnel pour les traders de tricher comme suit.

1. Les gains face à l'effacement du régulateur.

Si la BBA ne définit pas de sanction ou que Thomson Reuters (collecteur des données) ni, surtout, la FSA ⁸ (régulateur britannique) laissent trop de doutes quant à leur existence, alors il est rationnel que l'ampleur de la manipulation, si elle commence, augmente. Même face à une sanction élevée, les traders ont aussi pu choisir de manipuler l'indicateur du fait de la perspective de gains considérables en regard de la sanction.

Évoquant les origines du Libor à la fin des années 1960 pour Ridley et Jones (2012), Stanislas Yassukovich, alors banquier à la White, Weld & Co, souligne que l'appartenance au panel du Libor conférait déjà le sentiment d'appartenance à un "club" ⁹. Minos Zombanakis souligne quant à lui, qu'au sein de ce "club", le gain issu des opérations de syndication à l'origine du Libor (cf. section 1.2.1) constituait une rémunération suffisante. Dans les entretiens approfondis qu'ont pu avoir Liam Vaugham et Gavin Finch avec lui, le père fondateur du Libor moderne explique ainsi : "Back then the market was small and run by a few gentlemen. We took it for granted that gentlemen wouldn't try to manipulate things like that" (Vaughan et Finch, 2017, p. 18).

Bien qu'un tel propos puisse évidemment être considéré avec la réserve qui s'impose en pareille circonstance, si la croyance en l'existence du régulateur devait être faible à la création du Libor, du fait de la confiance accordée à ce "club de gentlemen", ces derniers n'auraient sans doute pas eu d'incitation immédiate à dévier du fait de la rémunération importante à faire partie de ce club. Toutefois, la logique du présent travail soulignerait que l'appât du gain aurait conduit à transgresser de façon très progressive la règle en vigueur, afin d'assurer une rémunération plus importante après des années voire des décennies sans intervention du régulateur. En effet, puisque la menace associée au fait de tricher était faible, alors la part conservée par le leader ("Senior trader") s'est accrue. Cela signifie que le leader n'a pas dû avoir à compenser beaucoup les traders car la menace perçue n'était pas importante.

Ainsi le régulateur aurait utilisé insuffisamment S et α_n pour éviter la manipulation du Libor. Du point de vue du régulateur, pour que les joueurs

^{8.} Financial Services Authority, devenu aujourd'hui Financial Conduct Authority.

^{9. &}quot;In the early days it was very much like a club."

ne trichent pas, grâce à l'étude qui précède, il aurait fallu que le régulateur manifeste davantage sa présence. Il aurait pu faire cela en explicitant son rôle pour passer d'une existence légale désincarnée à des manifestations de fait. En effet en se manifestant ne serait-ce que par un contrôle, il aurait pu révéler son type et faire passer α à 1. Augmenter sa sévérité n'est, dans ce modèle, pas une variable qui dissuadera les joueurs de tricher. En effet tant que le régulateur ne manifeste pas sa présence, la mise en place de sanctions parait n'avoir été qu'une menace théorique dans la prise de décision des acteurs. Cependant, en supposant que la FSA ait réellement décidé de remédier à la manipulation du Libor (ce qui n'a pas été le cas dans un premier temps), notre approche préconise tant l'augmentation des contrôles que des sanctions applicables.

D'une part, l'augmentation de la sanction S dans le modèle théorique réduit l'ampleur de la déviation, et d'autre part la communication claire sur un renforcement des sanctions pourrait donner du crédit à l'existence du régulateur.

La crédibilité des sanctions du régulateur fait effectivement partie de l'arsenal de mesures préconisées dans le rapport parlementaire remis par Martin Wheatley au gouvernement britannique en septembre 2012. Ce rapport préconise de retirer à la BBA le calcul du Libor afin de le remettre à une institution qui serait à la fois responsable de la collecte, du calcul et du contrôle ex post des valeurs soumises. Cela corrigerait à n'en pas douter l'ambiguïté qui s'était installée dans la délimitation des responsabilités de la BBA et de la FSA.

À ce titre, l'évolution récente du Libor semble confirmer ces deux approches. En effet, de nombreuses banques ont exprimé leur souhait de cesser de contribuer au panel de l'EURIBOR ¹⁰, en passe d'être réformé à la suite d'un scandale de même nature. Quelle que soit la perspective d'analyse mobilisée, ce retrait peut tout à fait être interprété comme un mécanisme d'autodéfense de la part des banques du groupe.

2. La dynamique sur plusieurs décennies du rapport des traders au Libor. A mesure que la manipulation a continué, la croyance en l'absence d'un régulateur a augmenté, ce qui a entraîné une augmentation de l'ampleur de la triche. Ainsi, les leaders sont ceux qui ont tiré le plus de profit de la rente de manipulation par un double canal : la taille du bénéfice a augmenté, de même que la part du bénéfice conservée par eux.

Ceci peut expliquer pourquoi on ne retrouve que quelques leaders/traders

^{10.} Solenn Poullennec, « L'Euribor-EBF travaille à un indice basé sur des transactions réelles » AGEFI du 19 mars 2013 : « L'institution [EURIBOR-EBF] s'inquiète avec la BCE de la vague de défections qui touche le panel de l'Euribor sur fond de craintes juridiques. RBI, Rabobank, BayernLB, Deka Bank et Citibank ont déjà jeté l'éponge. 39 établissements sont encore contributeurs mais UBS va rendre son tablier sous peu. »

dans les procès au pénal : ceux qui étaient les plus influents et donc qui captaient l'essentiel de la rente.

3. L'accroissement de la manipulation à l'origine de sa révélation. Si au début, les leaders ont eu peur du régulateur et de sa sanction potentielle, ce qui fut visiblement le cas dans les années 1960 (telles que décrites par Minos Zombanakis, qui affirme qu'il n'y avait pas de manipulation). Les premiers soupçons quant à la véracité des contributions émergent dans les années 1990. Ces périodes de manipulation limitée (correspondant à un γ_n intérieur au début du jeu) ont effectivement été suivies de périodes, dans les années 2000, de manipulations plus importantes et plus enrichissantes pour les "Senior traders" (leaders dans le jeu) qui en ont tiré profit. Ceci continue jusqu'à ce que l'ampleur de la manipulation devienne maximale. Arrivé à ce point où la manipulation continue mais n'augmente plus dans son ampleur, la rémunération totale des leaders continue à croître via l'augmentation des β_n (années 1980 jusqu'en 2007).

Il est à noter que c'est bien l'ampleur de la triche et non la répartition des gains qui est à l'origine de la dénonciation de la manipulation. En effet, les articles du Wall Street Journal à l'origine de la révélation ont été fondés sur la construction d'un modèle contrefactuel soulignant l'ampleur de la manipulation du Libor plus que l'enrichissement des manipulateurs. Cela correspond bien à l'intuition du modèle : c'est l'accroissement de γ_n qui correspond à celui de la probabilité de contrôle, et donc de se faire prendre. Dans le cas du Libor, il est remarquable que ce contrôle soit toutefois intervenu par une instance a priori extérieur au jeu, faisant ainsi de la presse une forme de régulation potentielle.

Dans le cadre du modèle, il est intéressant de noter qu'il n'est pas nécessaire d'atteindre l'ampleur maximale de la manipulation pour déclencher un contrôle, mais que l'augmentation des γ_n^* intérieurs peut à elle seule jouer ce rôle.

Conformément à notre modèle, l'incertitude quant à la nature du régulateur a été résolue lors de la révélation par le *Wall Street Journal*, ce qui a arrêté immédiatement la manipulation (i.e. fin du jeu).

En conclusion, la première des remarques est que ce travail pourrait bien sûr être complété pour mieux faire valoir les analyses. Parmi un foyer d'extensions possibles du modèle en interactions stratégiques, par exemple, l'extension du modèle au-delà de la myopie en horizon infini parait une des premières directions dans laquelle aller. Une analyse plus précise qui fait interagir notre modèle avec la mise en évidence d'une manipulation horizontale au sein du groupe pourrait également y être insérée, afin de marquer un lien plus fort encore avec la réalité des salles de marché.

Bibliographie

Abrantes-Metz R., Kraten M., Metz A & Seow G. (2012), « Libor manipulation? », *Journal of Banking and Finance* 36, pp. 136–150.

Arrow K. (1974), *The Limits of Organization*, New York et Londres: W.W. Norton & Company, 86 p.

Becker G. (1968), « Crime and Punishment : An Economic Approach », The Journal of Political Economy, vol. 76 n°2, pp. 169–217.

Bergemann, D. & Hege, U. (1998), « Venture capital financing, moral hazard, and learning », *Journal of Banking & Finance*, vol. 22, issue 6-8, 703-735.

Bergemann, D. & Hege, U. (2005), « The Financing of Innovation : Learning and Stopping », *The RAND Journal of Economics*, vol. 36, n°4, pp. 719-752.

Boltanski L., Thévenot L. (1991), De la justification. Les économies de la grandeur, Gallimard, collection « NRF Essais ».

Brière M. (2006), « 10. Représentations conventionnelles sur les marchés de taux », in L'Économie des conventions, méthodes et résultats, F. Eymard-Duvernay (dir.), La Découverte, collection « Recherches », pp. 177-191.

Cornelli, F. & Yosha, O. (2003), « Stage Financing and the Role of Convertible Securities », *The Review of Economic Studies*, Vol. 70 n°1, pp. 1-32.

Crémer, J. (2003), « Arm's Length Relationships », The Quarterly Journal of Economics, vol. 110, No. 2, pp. 275-295.

Duffie D., Skeie D. & Vickery J. (2013), « A Sampling-Window Approach to Transaction-Based Libor Fixing », Federal Reserve Bank of New York Staff Reports $n^{\circ}596$, février 2013.

Dupéret G. (2019), « La manipulation du Libor, une convention entre acteurs financier », $Working\ paper$

Eymard-Duvernay F. (2005), « Défauts de coopération et chômage : une théorie institutionnaliste », Document de travail du Centre d'études de l'emploi, $n^{\circ}46$, septembre 2005.

Eymard-Duvernay F. (2006), Introduction à $L'\acute{E}conomie$ des conventions, méthodes et résultats, F. Eymard-Duvernay (dir.), La Découverte, coll. « Recherches », pp. 11-20.

Feuerstein S. (2005), « Collusion in Industrial Economics – A Survey », Journal of Industry, Competition and Trade, 5: 3/4, pp. 163–198.

Friedman J. (1971), « A non-cooperative equilibrium for supergames », Review of Economic Studies, vol. 28, pp. 1-12.

Godechot O. (2001), Les traders. Essai de sociologie des marchés financiers, La Découverte, collection « Textes à l'appui. Enquêtes de terrain ».

Godechot O. (2009), « Concurrence et coopération sur les marchés financiers. Les apports des études sociales de la finance. », in *Traité de sociologie économique*, Steiner P. & Vatin F. (dir.), Presses Universitaires de France, collection « Quadrige », pp. 609-645.

Gyntelberg J. & Wooldridge P. (2008), « Interbank Rate Fixings During the Recent Turmoil », BIS Quarterly Review, mars 2008, pp. 59-72.

Kuo D., Skeie D. & Vickery J. (2012), « A comparison of Libor to other measures of bank borrowing costs », working paper (*draft* juin 2012).

Mollenkamp C. (2008a), « Bankers Cast Doubt On Key Rate Amid Crisis », Wall Street Journal, 16 avril 2008.

Mollenkamp C. (2008b), « Fed Officials Discuss Libor With Traders in London », Wall Street Journal, 29 mai 2008.

Mollenkamp C. & Whitehouse M. (2008), « Study Casts Doubt on Key Rate », Wall Street Journal, 16 mai 2008.

Monticini A., Thornton D. (2013), « The effect of underreporting on LIBOR rates », $Journal\ of\ Macroeconomics\ 37,\ pp.\ 345–348.$

Moulin H. (1980), « On Strategy-proofness and Single Peakedness », $Public\ choice\ vol.\ 35\ n^4$, pp.437-455.

Orléan A. (1994), « Vers un modèle général de la coordination économique par les conventions », Introduction générale à l'*Analyse économique des conventions*, A. Orléan (dir.), Presses Universitaires de France, collection « Quadrige », 1994, pp. 49-80 dans l'édition de 2004.

Orléan A. (2004), « L'économie des conventions : méthodes et résultats », Préface à la réédition de l'*Analyse économique des conventions*, A. Orléan (dir.), Presses Universitaires de France, collection « Quadrige », 2004, pp. 9-48.

Shapiro C. & Stiglitz J. (1984), « Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device », American Economic Review, vol. 74 n°3, pp. 433-444.

Snider C. & Youle T. (2010), « Does the Libor reflect banks' borrowing costs? », UCLA Working Paper (draft avril 2010).

Sugden R. (1986), The Economics of Rights, Co-operation and Welfare, Basil Blackwell, 191 p.

Taylor J. & Williams J. (2008), « A Black Swan in the Money Market », $NBER\ Working\ Paper\ n^\circ\ 13\ 943,\ avril\ 2008.$

Von Neumann J. & Morgenstern O. (1944), Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, 625 p. (1ère édition).

Weber M. (1921), Économie et société, tome 1. Les catégories de la sociologie, références dans l'édition de 1995, Plon, Collection « Agora. Les classiques ».

Young P. (1996), « The Economics of Convention », *Journal of Economic Perspectives*, vol. 10, n°2, pp. 105-122.